**Модели задач оптимального планирования:**

1. задача оптимального распределения ресурсов при планиро­вании выпуска продукции на предприятии (задача об ассор­тименте);
2. задача на максимум выпуска продукции при заданном ассор­тименте;
3. задача о смесях (рационе, диете);
4. транспортная задача;
5. задача о рациональном использовании имеющихся мощно­стей;
6. задача о назначениях.

**1.Задача оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии (задача об ассортименте).**

Пред­положим, что предприятие выпускает ***п*** различных изделий. Для их производства требуются ***т*** различных видов ресурсов (сырья, вспомогательных материалов, рабочего и машинного времени). Эти ресурсы ограничены и составляют в планируемый период ***b1, b2,…, bт*** условных единиц. Известны также технологические коэффициенты ***аij****,* которые указывают, сколько единиц ***i-***го ресурса требуется для производства изделия ***j-***го вида (***i=*** *;* ***j =*** *).* Пусть прибыль, получаемая предприятием при реализации едини­цы изделия ***j***-го вида, равна ***cj.*** В планируемый период все показа­тели ***bi,******аij****и* ***cj*** предполагаются постоянными.

Требуется составить такой план выпуска продукции, при реа­лизации которого прибыль предприятия была бы наибольшей. Другими словами, требуется составить оптимальный план работы предприятия  ***= (х1, х2,..., хn),*** т.е. найти такие значения переменных ***х1, х2,..., хn*** (объем выпуска продукции каждого вида), чтобы обеспечить предприятию получение максимальной прибы­ли от реализации всей продукции и чтобы на ее производство хва­тило имеющихся в распоряжении ресурсов.

***Экономико-математическая модель задачи***

**f()=,**

**xj0, j=**

Целевая функция ***f()*** представляет собой суммарную прибыль от реализации объема выпускаемой продукции всех видов. В дан­ной модели оптимизация плана возможна за счет выбора наиболее выгодных видов продукции.

Ограничения означают, что для любого из ресурсов его суммар­ный расход на производство всех видов продукции не превосходит его запасы.

При составлении плана производства приходится учитывать не только ограниченность ресурсов, но и директивные задания по выпуску продукции ***Tj*** (госзаказы или уже заключенные договоры по отдельным видам продукции). В таком случае модель дополнит­ся ограничением вида **xj  *Tj .***

В этом случае свобода выбора значительно снижается.

**2.Задача на максимум выпуска продукции в заданном ассорти­менте.**

Введем обозначения: ***xj*** *—* объем производства ***j-***го продук­та; ***п*** — количество видов выпускаемой продукции; ***kj*** — количество изделий ***j***-го вида, которые входят в некоторый комплект (напри­мер, комплект запасных частей для автомобиля). Известны также технологические коэффициенты ***аij****,* которые указывают, сколько единиц ***i***-го ресурса требуется для производства изделия ***j***-го вида, и запасы ресурсов ***i***-го вида ***bi****(****i= ; j =*** *)****.***

Количество комплектов продукции ***K*** будет следующим:

***К* = {*xj / kj*},**

т.е. общее количество комплектов определяется количеством из­делий, из которых можно сформировать меньше всего «порций» объемом ***kj****.* Эти изделия определяют «узкое место» в формирова­нии комплектов, к максимальной «расшивке» которого следует стремиться.

Введем новое ограничение ***xj / kj K****,* которое связывает количе­ство комплектов ***К*** с условием по формированию комплектов.

**Экономико-математическая модель задачи**

**K max,**

***xj / kj K, j=,***

***xj 0.***

**3.Задача о смесях (рационе, диете).**

К группе задач о смесях относят задачи по отысканию наиболее дешевого набора из опре­деленных исходных материалов, обеспечивающих получение сме­си с заданными свойствами. Получаемые смеси должны иметь в своем составе ***п*** различных компонентов в определенных количе­ствах, а сами компоненты являются составными частями ***т*** исход­ных материалов.

Введем следующие обозначения: ***xj*** — количество материала ***j***-го вида, входящего в смесь; ***cj*** *—* цена материала ***j****-*го вида; ***bi*** — минимально необходимое содержание ***i***-го компонента в смеси. Коэф­фициенты ***аij***показывают удельный вес ***i***-го компонента в единице ***j***-го материала.

**Экономико-математическая модель задачи**

**f()=,**

***xj* ≥ 0, *j = .***

Целевая функция представляет собой суммарную стоимость смеси. Функциональные ограничения являются ограничениями по содержанию компонентов в смеси: смесь должна содержать компоненты в объемах, не менее указанных.

**4.Транспортная задача.**

Пусть некоторый однородный продукт, сосредоточенный у ***т*** поставщиков ***Ai*** в количестве ***ai*** единиц (***i=*** *),* необходимо доставить ***п*** потребителям ***Bj*** в количестве ***bj*** единиц *(****j =*** ). Известна стоимость ***cij*** перевозки единицы груза от поставщика ***Ai*** к потребителю ***Bj****.*

Требуется составить план перевозок, позволяющий с минималь­ными затратами вывезти все грузы и полностью удовлетворить потребителей.

Обозначим через ***xij*** количество единиц груза, запланированных к перевозке от ***i-***го поставщика к ***j***-му потребителю. Так как от поставщика ***Ai*** к потребителю ***Bj*** запланировано перевезти ***xij*** еди­ниц груза, то стоимость перевозки составит ***cijxij****.*

Стоимость всего плана перевозок выразится двойной суммой

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

1)все грузы должны быть перевезены, т.е.

2)все потребности должны быть удовлетворены, т.е.

**Экономико-математическая модель задачи**

***xij ≥ 0, i=***

В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запа­сы равны суммарным потребностям:

Транспортная задача, в которой суммарные запасы и потребно­сти совпадают, т.е. выполняется условие (5), называется

***закрытой моделью***; в противном случае — ***открытой****.* Для открытой модели возможны два случая:

а) суммарные запасы больше чем суммарные потребности:

б) суммарные запасы меньше чем суммарные потребности:

Целевая функция одинакова в обоих случаях, изменяется толь­ко вид системы ограничений:

при ограничениях:

**-в случае «а»**

***xij ≥ 0 ;***

**-в случае «б»**

***xij ≥ 0***

**Открытая модель может быть приведена к закрытой модели:**

**в случае «а»,** когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится *фиктивный потребитель* ***Вп+1****,* потреб­ность которого описывается формулой

**в случае «б»,** когда суммарные потребности превышают суммар­ные запасы, вводится *фиктивный поставщик* ***Aт+1****,* запасы кото­рого описываются формулой

Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потреби­теля и стоимость перевозки груза от фиктивного поставщика по­лагаются равными нулю, так как груз в обоих случаях не перево­зится.

Транспортная задача имеет ***п + т*** уравнений с***тп*** неизвестными. Матрицу перевозок ***X* = *(xij)тп****,* удовлетворяющую условиям (2)—(4), называют *планом перевозок* транспортной задачи, а ***xij****— перевозками.*

План ***X\*,*** при котором целевая функция (1) обращается в минимум, называется *оптимальным планом перевозок.*

**5.Задача о рациональном использовании имеющихся мощностей.** Пусть предприятию задан план производства по времени и номен­клатуре: требуется за время ***Т***выпустить ***b1, b2,..., bп*** единиц про­дукции вида ***1, 2, ..., п*** соответственно. Продукция производится на *т* различных технологических участках. Производительность каждого из них задана коэффициентом ***аij****,* который показывает,сколько единиц продукции ***j***-го вида (***j=*** ) можно произвести на ***i***-м участке (***i*=** *)* в единицу времени. Известны издержки ***сij****,* отражающие все затраты на изготовление продукции ***j-***го вида на ***i***-м участке в единицу времени.

Требуется составить оптимальный план работы участков, т.е. найти, сколько времени ***i***-й участок будет занят изготовлением ***j***-й продукции с тем, чтобы общие издержки были наименьшими. Сведем исходные данные в таблицу (табл. 1).

Обозначим переменные модели через ***xij*** — время работы ***i***-го участка при изготовлении ***j***-й продукции.

**Экономико-математическая модель задачи**

**Таблица 1.**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Технологический участок** | **Вид продукции** | | | | | |
| **1** | **2** | **…** | **j** | **…** | **n** |
| ***1***  ***2***  ***…***  ***i***  ***…***  ***m*** | *a11; c11*  *a21; c21*  *…*  *ai1; ci1*  *…*  *am1; cm1* | *a12; c12*  *a22; c22*  *…*  *ai2; ci2*  *…*  *am2; cm2* | *…*  *…*  *…*  *…*  *…*  *…* | *a1j; c1j*  *a2j; c2j*  *…*  *aij; cij*  *…*  *amj; cmj* | *…*  *…*  *…*  *…*  *…*  *…* | *a1n; c1n*  *a2n; c2n*  *…*  *ain; cin*  *…*  *amn; cmn* |
| **Запланированный объем продукции** | **b1** | **b2** | **…** | **bj** | **…** | **bn** |

***xij* ≥ 0, *i = ; j = .***

Целевая функция представляет собой суммарные затраты на производство продукции. Условия (6) предполагают, что время работы на каждом участке ограничено и не превышает ***Т****,* а условия (7) обеспечивают выполнение плана по номенклатуре.

**6.Задача о назначениях.**

Задача о назначениях — это распреде­лительная задача, в которой для выполнения каждой работы требу­ется один и только один ресурс (один человек, одна автомашина и т.п.), и каждый ресурс может быть использован на одной и только одной работе, т.е. ресурсы неделимы между работами, а работы — между ресурсами. Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. Задача о назначениях имеет место при распре­делении людей на Должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, групп по аудиториям, научных тем по науч­но-исследовательским лабораториям и т.п.

*Исходные параметры* задачи о назначениях:

***т*** — количество ресурсов;

***n*** — количество работ;

***аi =* 1** — единичное количество ресурса ***Аi****,* ***i*** ***=***  (например: один работник; одно транспортное средство; одна науч­ная тема);

***bj =* 1** — единичное количество работы ***Вj****,* ***j=***  (например: одна должность; один маршрут; одна лаборатория);

***cij*** — характеристика качества выполнения работы ***Вj*** с помощью ресурса ***Аi*** (например: компетентность работника ***i*** при ра­боте на должности ***j***; время, за которое транспортное сред­ство ***i*** перевезет груз по маршруту ***j***; степень квалификации лаборатории ***i*** при работе над научной темой ***j***).

*Искомые параметры:* ,

***xij*** *—* факт назначения или неназначения ресурса ***Ai*** на работу ***Вj****:*

***x*ij =0**, если ресурс ***i*** не назначен на работу ***j***;

***x*ij =**1, если ресурс ***i*** назначен на работу ***j***;

***f(X)*** — общая (суммарная) характеристика качества распреде­ления ресурсов по работам.

Исходные данные задачи о назначениях можно свести в табл. 2.

***Таблица 2.***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ресурсы** | **Работы** | | | | **Количество ресурсов** |
| **B1** | **B2** | **…** | **Bn** |
| **A1**  **A2**  **…**  **Am** | c11  c21  …  cm1 | c12  c22  …  cm2 | …  …  …  … | c1n  c2n  …  cmn | 1  1  …  1 |
| **Количество работ** | **1** | **1** | **…** | **1** |  |

**Экономико-математическая модель задачи**

***xij {0;1}, i=; .***

По сравнению с *транспортной задачей* процесс приведения *задачи о назначениях* к сбалансированному виду имеет свои особен­ности *(****xij***принимают два значения: 0 или 1).